

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра « Детали машин и ПТУ»

## **Определение момента инерции твердых тел**

*Методические указания к выполнению  
лабораторной работы № 5*

РПК  
"Политехник"

Волгоград  
2006

УДК621.833.6

Определение моментов инерции тел методом двухниточного подвеса: метод. указ. к выполнению лабораторной работы № 5 / сост.: С. Ю. Кислов, В. А. Костюков, О. А. Сотников; Волгоград. гос. техн. ун-т. – Волгоград, 2006. – 12 с.

Приводится описание работы и установки для определения моментов инерции твердых тел, порядок ее проведения, а также изложены наиболее встречающиеся экспериментальные методы.

Рекомендуется использовать студентами механических специальностей всех форм обучения при подготовке их к выполнению лабораторной работы по курсу «Теория механизмов и машин».

Ил. 8. Табл. 1. Библиогр.: 5 назв.

Рецензент В. И. Карлов

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Волгоградского государственного технического университета

© Волгоградский  
государственный  
технический  
университет, 2006.

**Цель работы:** теоретическое и экспериментальное определение моментов инерции твердых тел методом двухниточного подвеса; сравнение экспериментальных и теоретических результатов.

## 1. Краткие сведения из теории

Моментом инерции тела относительно оси называется величина равная сумме произведений масс всех частей тела на квадрат расстояния от этой же оси. Момент инерции тела является мерой его инертности при вращательном движении. Его необходимо знать при решении задач динамики механической системы (определение кинетической энергии, моментов сил инерции, решение уравнений вращательного движения).

Теоретически момент инерции тела произвольной формы относительно оси вращения можно определить по формуле:

$$J = \int_0^m \rho^2 dm, \quad (1)$$

где  $dm$  – элементарная масса,

$\rho$  – расстояние от оси вращения тела до элементарной массы.

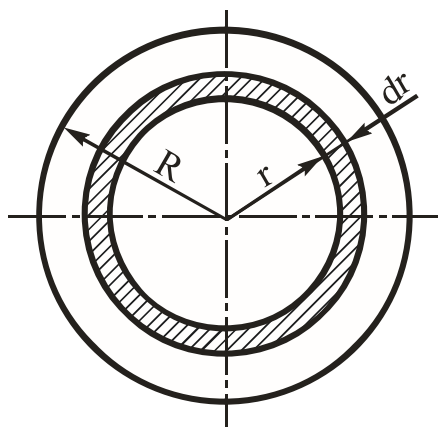


Рис. 1

Для диска имеющего одинаковую плотность выделим элементарное кольцо радиусом  $r$ , толщиной  $dr$  и высотой диска, равной  $h$ . Пусть удельная масса диска равна  $\gamma$ . Тогда элементарная масса кольца равна

$$dm = 2\pi r h \gamma dr.$$

Все точки кольца находятся на расстоянии  $r$  от его центра. Поэтому, применив формулу (1), получим:

$$J = 2\pi h \gamma \int_0^R r^3 dr,$$

после интегрирования которой получим:

$$J_{\text{д}} = \frac{mR^2}{2}, \quad (2)$$

где  $m$  – масса тела, момент инерции которого определяется,

$R$  – наружный диаметр диска.

Как видно из формул (1) и (2) размерность момента инерции  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ .

Применение формулы (1) предпочтительно только для определения момента инерции тел простой формы. Например, диск, шар и т.д. При сложной форме тела расчеты по формуле (1) становятся очень трудоемкими, поэтому применяются экспериментальные методы определения мо-

мента инерции. К таким методам относится метод двухниточного подвеса, применяемый в данной лабораторной работе. Он основан на связи частоты (периода) свободных колебаний механической системы с ее моментом инерции.

## 2. Описание и принцип действия лабораторной установки

Установка состоит (см. рис. 2) из вертикальной стойки 1, на которой смонтировано пусковое устройство 2 и горизонтальная траверса 3. К траверсе 3 на двух нитях 4 подвешена вторая горизонтальная траверса 5, в центре которой находится устройство 6 для крепления тела 8, момент инерции которого определяется.

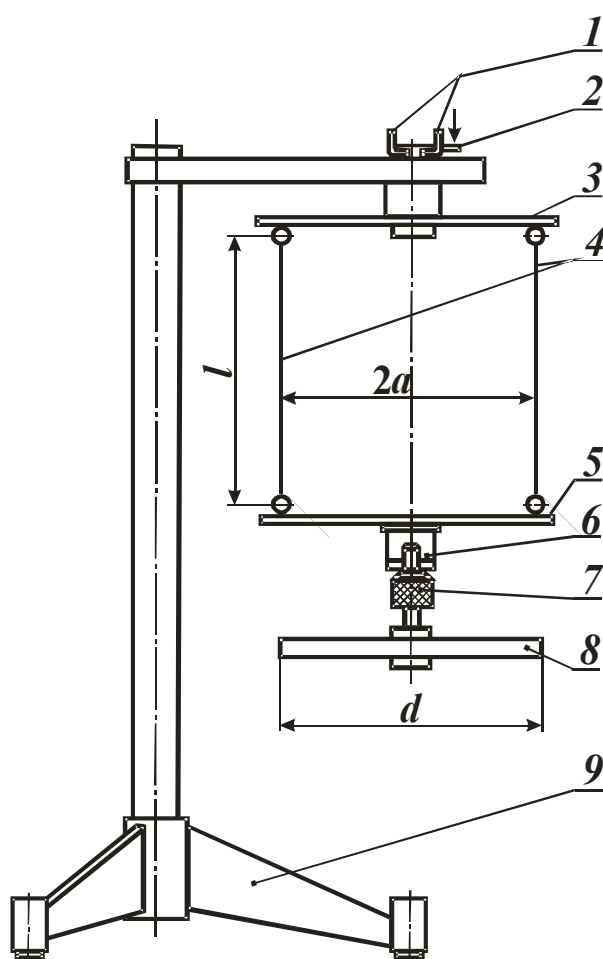


Рис. 2

Срабатывание пускового устройства 2 дает толчок всей системе и приводит к свободным крутильным колебаниям нижней траверсы 5 и нитей, на которых она подвешена. Поворот нитей при крутильных колебани-

ях нижней траверсы и подвешенной к ней детали приводит к подъему траверсы с телом, момент инерции которого определяется. В результате траверса с телом  $\delta$  помимо прокручивания поднимается и опускается (винтовое движение).

Уравнение движения колебательной системы обладающей крутильной жесткостью имеет вид:

$$J\ddot{\varphi} + k\varphi = 0, \quad (3)$$

где  $J$  – момент инерции системы;

$\varphi$  – угол поворота системы;

$k$  – крутильная жесткость системы;

$\ddot{\varphi}$  – угловое ускорение системы.

Из теории колебаний известно, что круговая частота колебаний системы

$$p = \sqrt{\frac{k}{J}} \quad (4)$$

связана с периодом колебаний  $T$  зависимостью

$$pT = 2\pi. \quad (5)$$

Из формул (4) и (5), зная период колебаний можно определить момент инерции

$$J = \frac{kT^2}{4\pi^2}, \quad (6)$$

Винтовые движения колеблющейся нижней траверсы с телом, момент инерции которого надо определить, приводят к периодическому их подъему и опусканию. Если пренебречь потерями в системе, то можно считать, что энергия крутильных колебаний переходит полностью в потенциальную энергию, что можно представить уравнением

$$\frac{k\varphi^2}{2} = mgz, \quad (7)$$

где  $m$  – масса подвешенного груза (траверса и тело);

$g$  – ускорение свободного падения;

$z$  – вертикальное смещение траверсы и тела.

Подставив (7) в (6) получаем:

$$J = \frac{mgzT^2}{2\pi^2\varphi^2}. \quad (8)$$

Из рис. 3 видно, что высота подъема конца нити может быть найдена по формуле

$$z = l(1 - \cos\alpha), \quad (9)$$

где  $\alpha$  – угол поворота нити при колебаниях системы;

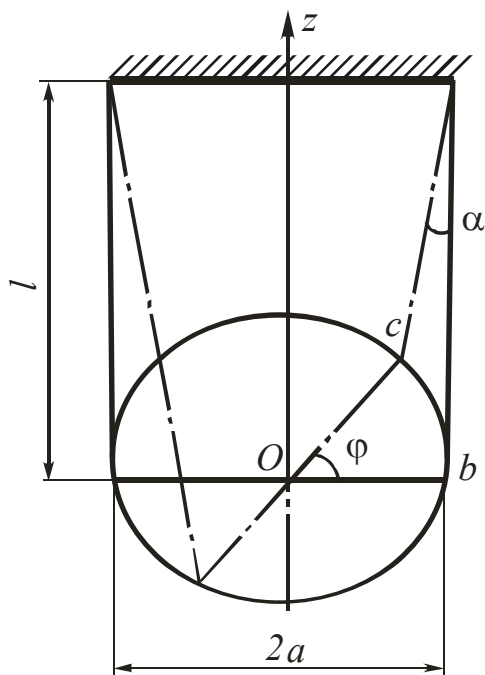


Рис. 3

$l$  – длина нити.

Угол  $\alpha$  найдем, исходя из того, что угол поворота тела мал ( $\approx 6 - 10^0$ ) и дуга  $bc$  описываемая концом нити совпадает с дугой от угла  $\varphi$  при крутильных колебаниях. Тогда

$$\cup bc = l\alpha = \varphi a, \quad (10)$$

где  $2a$  – расстояние между нитями.

Отсюда

$$\alpha = \varphi \frac{a}{l}. \quad (11)$$

Заменив в формуле (9)  $\cos\alpha$  первыми двумя членами степенного ряда разложения косинуса и подставив  $\alpha$  из (11) получим:

$$z = l \frac{\alpha^2}{2!} = \frac{\varphi^2 a^2}{2l}. \quad (12)$$

Подставив (12) в (8) получим:

$$J = \frac{mga^2T^2}{4\pi^2l}. \quad (13)$$

### 3. Определение момента инерции тел методом физического маятника

Метод основан на зависимости периода свободных колебаний маятника от его момента инерции.

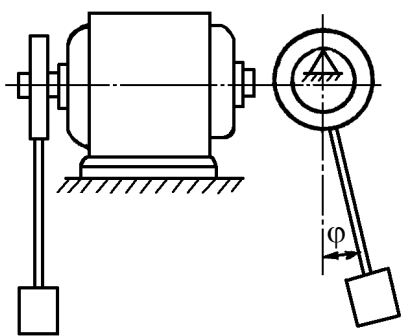


Рис. 4

Рассматриваемый метод не требует сложного оборудования и удобен при определении моментов инерции деталей, которые можно подвесить и положение центра масс которых известно.

Метод применяется также для определения моментов инерции подвижных деталей и сборок, находящихся в механизмах, если силы трения и зазоры в кинематических парах незначительны. В этом случае он удобен тем, что нет необходимости разбирать механизм для определения момента

инерции звена. Для этого применяется дополнительный маятник, жестко соединенный с этим звеном и имеющий возможность совершать колебательные движения вместе с ним.

Подвешенные на призме маятник или деталь, будучи выведены из положения равновесия, совершают колебательные движения. Момент инерции, которых относительно точки подвеса выражается уравнением:

$$J = \frac{mgRT^2}{2\pi^2}, \quad (14)$$

где  $m$  – масса маятника или детали;

$g$  – ускорение свободного падения;

$R$  – расстояние от центра масс маятника (детали) до точки подвеса;

$T$  – период колебаний маятника или детали.

Для определения момента инерции относительно центра масс детали или другой ее точки можно воспользоваться теоремой Штейнера:

$$J_o = J_s + R^2 m, \quad (15)$$

где  $J_o$  – момент инерции детали относительно оси, проходящей через точку  $O$ ;

$J_s$  – момент инерции детали относительно оси, проходящей через центр масс  $S$ ;

$R$  – расстояние между точками  $O$  и  $S$ ;

$m$  – масса детали.

#### 4. Определение момента инерции тел методом опускания груза

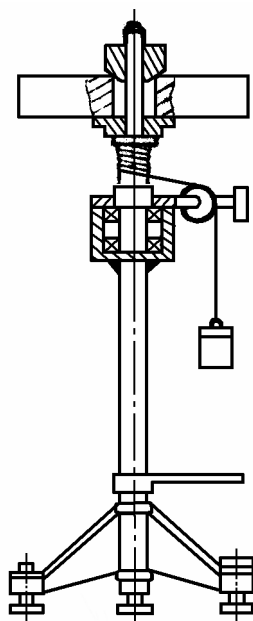


Рис. 5

Метод основан на связи параметров равноускоренного движения механической системы с ее моментом инерции. Применяется в основном для определения моментов инерции тел вращения или тел симметричных относительно оси вращения.

Деталь, момент инерции которой необходимо определить, закрепляется на шпинделе, имеющем вертикальную ось вращения. Шпиндель и деталь приводятся во вращение опускающимся грузом, подвешенным на нити, которая наматывается на шкив, сидящий на одной оси со шпинделем. Таким образом, движение системы происходит под действием силы веса груза, часть которой идет на преодоление сил трения в опорах шпинделя и других узлов.

Для определения момента инерции детали можно воспользоваться уравнением

$$J = \frac{m g r^2 T^2}{2 h} - J' - (m + m') r^2, \quad (16)$$

где  $m$  – масса опускаемого груза;

$g$  – ускорение свободного падения;

$r$  – радиус шкива;

$T$  – время опускания груза;

$h$  – высота опускания груза;

$J'$  – момент инерции вращающихся частей установки относительно оси вращения;

$m'$  – масса, необходимая для уравнивания силы трения.

Обычно величины  $J'$  и  $m' r$  малы по сравнению с  $J$  и ими пренебрегают.

Тогда окончательная формула примет вид:

$$J = m r^2 \left( \frac{g T^2}{2 h} - 1 \right). \quad (17)$$

Для уравнивания силы трения  $F_T$  в установке к нити подвешивают набор шайб, вес которых равен силе трения:  $F_T = m' g$

## 5. Определение момента инерции тел методом крутильных колебаний упругого стержня

Метод основан на зависимости периода свободных колебаний механической системы от ее момента инерции. Применяется в основном для определения моментов инерции тел вращения или тел симметричных относительно оси вращения.

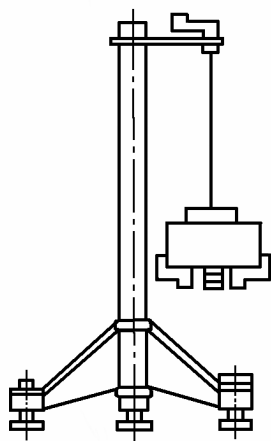


Рис. 6

Деталь, момент инерции которой необходимо определить, подвешивают на стержне, проходящем через ось ее вращения. Если деталь жестко соединена со стержнем, а последний также жестко соединен с опорой, то они образуют крутильную колебательную систему, в которой роль пружины выполняет стержень. Повернув деталь на некоторый угол вокруг оси стержня, при этом стержень закручивается, и, отпустив ее, получим свободные колебания системы под действием упругих сил стержня.



Для нахождения момента инерции колебательной системы, которая кроме момента инерции детали включает в себя момент инерции стержня и приспособления с деталью можно воспользоваться формулой

$$J = \frac{J_p GT^2}{4\pi^2 l}, \quad (18)$$

где  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$  – полярный момент инерции круглого в сечении прутка;

$d$  – диаметр сплошного стержня;

$G$  – модуль упругости второго рода (для стали  $G=8 \cdot 10^4$  МПа);

$T$  – период колебаний системы;

$l$  – свободная длина стержня.

Момент инерции детали определяют как разность момента инерции колебательной системы и момента инерции стержня с патроном.

Зависимость (18) выведена из уравнения, не учитывающего потери на трение в колебательной системе, нелинейность упругой характеристики стержня при больших деформациях и др., поэтому она достаточно точно отражает физическую сторону процесса только для малых колебаний (амплитуда менее  $10^0$ ), которые и необходимо использовать для этого метода.

## 6. Маховик

В некоторых случаях для повышения кинетической энергии механизма необходимо устанавливать на ведущий быстроходный вал деталь, обладающую большим моментом инерции. Эта деталь получили название *маховик*. Маховик то отдает часть своей кинетической энергии при возрастании нагрузки на механизм, то, наоборот, накапливает кинетическую энергию, когда нагрузка уменьшается. На рис. 7 а приведена конструкция маховика, выполненная в виде колеса, имеющего массивный обод. Момент инерции этого маховика определяется по формуле

$$J_m = \frac{mD^2}{4} \quad (19)$$

На рис. 7 б показана конструкция маховика, выполненная в виде диска, посаженного на ступицу.

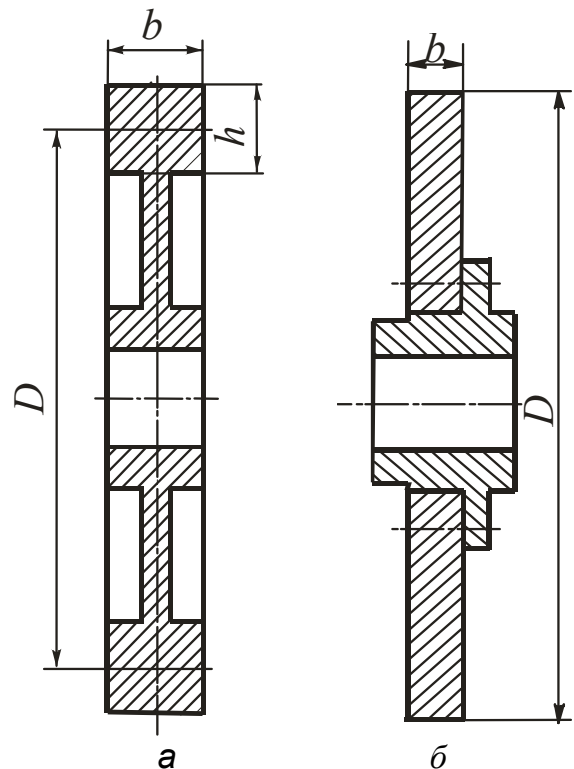


Рис. 7

## 7. Порядок выполнения работы

1. На нижней траверсе с помощью устройства 6 закрепить деталь 8, момент инерции которой необходимо определить. Гайка крепления детали к траверсе 7 должна быть затянута усилием руки до отсутствия над ней зазора.

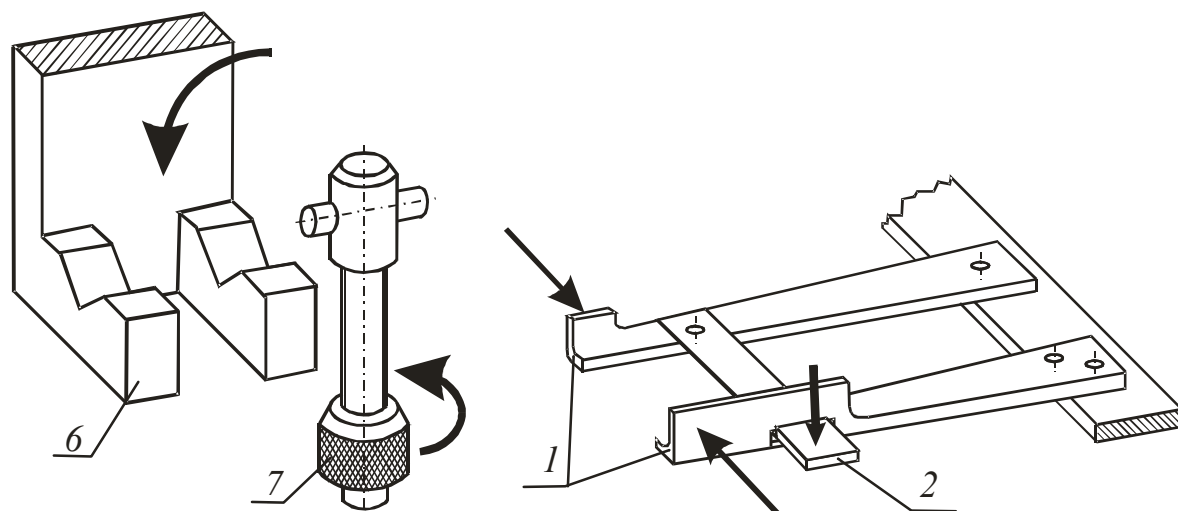


Рис. 8

2. Взвести пусковой механизм, сжав лапки 1 до щелчка (направляя их навстречу друг другу).
3. Легким прикосновением руки успокоить колебания нижней траверсы с деталью.
4. Одновременно нажать на пусковое устройство 2 и запустить секундомер.
5. Измерить длительность  $n$  полных колебаний. Количество колебаний задается преподавателем, как правило,  $n = 20 - 30$ .
6. Повторить пункты 1 – 5 по пять раз для разных деталей, занося результаты  $t_1, t_2, \dots, t_5$  в таблицу 1.
7. Определить период колебаний  $T$  по формуле:

$$T = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{5n}. \quad (20)$$

8. Вычислить моменты инерции твердых тел по формуле (13) и занести результаты в табл. 1. Длина нити  $l = 0,4$  м, расстояние между нитями  $2a = 0,28$  м, массы твердых тел указаны в табл. 1.
9. Определить расхождение между теоретическим, найденным по формуле (2) и экспериментальным моментом инерции диска:

$$\Delta J = \frac{J_{\Gamma} - J_{\text{Э}}}{J_{\Gamma}}. \quad (21)$$

Таблица 1

| Деталь          | $m$<br>кг | Число колебаний $n=$          |       |       |       |       |          | $T$<br>с | $T^2$<br>с <sup>2</sup> | $T^2 m$<br>кг·с <sup>2</sup> | $\frac{a^2 g}{4\pi^2 l}$<br>м <sup>2</sup> /с <sup>2</sup> | $I_T$<br>кг·м <sup>2</sup> | $I_{\Sigma}$<br>кг·м <sup>2</sup> |
|-----------------|-----------|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|-------------------------|------------------------------|--|----------------------------|-----------------------------------|
|                 |           | Длительность $n$ колебаний, с |       |       |       |       |          |          |                         |                              |  |                            |                                   |
|                 |           | $t_1$                         | $t_2$ | $t_3$ | $t_4$ | $t_5$ | $t_{cp}$ |          |                         |                              |  |                            |                                   |
| Диск            | 5,67      |                               |       |       |       |       |          |          |                         |                              |  |                            |                                   |
| Зубчатое колесо | 3,03      |                               |       |       |       |       |          |          |                         |                              |  | —                          |                                   |
| Конус           | 3,45      |                               |       |       |       |       |          |          |                         |                              |  | —                          |                                   |
| Канатный блок   | 2,79      |                               |       |       |       |       |          |          |                         |                              |  | —                          |                                   |
|                 |           |                               |       |       |       |       |          |          |                         |                              |  | —                          |                                   |

### Вопросы для самоконтроля

1. Объясните физический смысл понятий “масса тела” и “момент инерции тела”.
2. Напишите 2-й закон Ньютона для поступательного и вращающегося тела.
3. Запишите выражение для определения махового момента маховика.
4. Чему равна кинетическая энергия вращающегося и поступательно движущегося тела?
5. Что такое период колебаний?
6. Напишите зависимость между частотой и периодом колебаний.
7. Чем отличаются свободные колебания от вынужденных?
8. На чем основано определение момента инерции в лабораторной установке?
9. Объясните понятие “приведенная масса тела” “приведенный момент инерции тела”.
10. Что называется радиусом инерции тела?
11. Методы определения момента инерции.
12. Что такое маховик и какова его оптимальная форма?
13. Какие методы экспериментального определения моментов инерции тел наиболее распространены на практике?
14. В чем заключается теорема Штейнера?
15. С какой целью производится определение момента инерции тел и приведенного момента инерции механизма?

## **Рекомендуемая литература**

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин, М: Наука, 1988. – 640 с.
2. Теория механизмов и машин: Учеб. для втузов /К. В. Фролов, С. А. Попов и др. под ред. К. В. Фролова.– М: Высш. шк., 1987.– 496 с.
3. Левитский Н. И. Теория механизмов и машин :Учеб. пособие для вузов.– М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.,1990.– 592 с.
4. Гавриленко В. А. Теория механизмов: Учеб. для втузов, – М.: Высш. шк., 1973 – 510 с.
5. Юдин А. В., Петрокас Л.В. Теория механизмов и машин, М: Высш. шк., 1977.– 527 с.

Составители: Сергей Юрьевич Кислов  
Владимир Александрович Костюков  
Олег Александрович Сотников

## **Определение момента инерции тела методом двухниточного подвеса.**

*Методические указания к выполнению  
лабораторной работы № 5*

Темплан 2006г. Поз. №

Подписано в печать . .2006

Формат 60 × 84 1/16. Бумага газетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,7.

Тираж 500 экз. Заказ . Бесплатно.

Волгоградский государственный технический университет.

400131 Волгоград, просп. им. В. И. Ленина, 28.

РПК «Политехник»

Волгоградского государственного технического университета.

400131 Волгоград, ул. Советская, 35.